УДК 517.9

ОБ $L_p - L_q$ - ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

©А. И. Марковский

Рассматривается задача Коши для линейного гиперболического уравнения 2-го порядка

$$\mathcal{L}[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} - c(t,x)u = 0 \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x), \quad x \in R^n, \quad n \geq 2. \tag{2}$$

Предполагается, что коэффициенты $a_j(t,x)$, $c(t,x)$ - комплекснозначные достаточно гладкие, ограниченные вместе с некоторым числом своих производных функции.

Если $g(x)$ - достаточно гладкая быстро убывающая на ∞ функция, то решение задачи (1),(2) существует, единственно и при каждом $0 < t < \infty$ является линейным оператором от g:

$$u(t,x) = (T_t g)(x).$$

Спрашивается, можно ли T_t продолжить по непрерывности как оператор, действующий из $L_p(R^n)$ в $L_q(R^n)$, т.е. когда верна оценка

$$\|u(t,\bullet)\|_{L_q} \leq c_t \|g(\bullet)\|_{L_p} \tag{3}$$

(здесь и далее мы пишем L_p вместо $L_p(R^n)$). Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема. *Чтобы оценка (3) была справедливой, достаточно, а в случае, когда $a_j = const$, $c = const$,- и необходимо, чтобы точка с координатами $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ принадлежала замкнутому треугольнику Γ_1 с вершинами в точках* $P_1 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1})$, $P_2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1})$, $P_3 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1})$.

Эта теорема является некоторым обобщением замечательного результата Б.Маршалла, В.Штрауса и С.Вайнгера [1], относящегося к уравнению Клейна-Гордона (когда $a_j(t,x) = 0$, $c(t,x) = -1$). Справедливости ради следует сказать, что в доказательствах в [1] имеются пробелы, восполнению которых посвящена работа [5].

Случай $p = q$ и $a_j \equiv 0$, $c \equiv 0$ изучен в работах [2],[3],[4]. Случай постоянных коэффициентов a_j и c и $p = q$ рассмотрен в [6],[7], случай переменных коэффициентов a_j и c и $p = q$ - в [8].

Доказательство теоремы основано на двух леммах, для формулировки которых напомним известное

Определение. Ограниченная измеримая функция $m(\xi) \in M_p^q, \xi \in R^n$, если оператор

$$(T_m f)(x) = \int_{R^n} m(\xi)\hat{f}(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi$$

непрерывно действует из L_p в L_q, то есть

$$\|T_m f\|_{L_q} \leq c\|f(\bullet)\|_{L_p} \quad \forall f \in L_p.$$

Лемма 1. *Пусть* $m(\xi) \in C^k(R^n)$, $k \geq \frac{n}{2}$,
и $|D_\xi^\alpha m(\xi)| \leq c_\alpha(1+|\xi|)^{-n-|\alpha|}$ $\forall \xi \in R^n$, $|\alpha| \leq \frac{n}{2}$
Тогда $m(\xi) \in M_p^q$ *для любых* $1 < p \leq q < \infty$.

Доказательство получается комбинацией известных теорем С.Г.Михлина о мультипликаторах и С.Л.Соболева о свертке с полярным ядром $|x|^{-\lambda}, 0 < \lambda < n$.

Обозначим $r = |\xi|, \xi \in R^n$ и пусть $\psi(r) \in C^\infty(R_+^1), \psi = 0$ в некоторой окрестности нуля и $\psi = 1$ вне несколько большей окрестности нуля. Пусть $l > 0, t > 0$.

Лемма 2. *Функция* $m(r) = \psi(r) r^{-l} e^{itr}$ *принадлежит* M_p^q *тогда и только тогда, когда точка* $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in \Gamma_l$, *где* Γ_l*-замкнутый треугольник на плоскости с вершинами в точках* $P_1 = (\frac{1}{2} - \frac{l}{n-1}, \frac{1}{2} - \frac{l}{n-1})$, $P_2 = (\frac{1}{2} + \frac{l}{n+1}, \frac{1}{2} - \frac{l}{n+1})$, $P_3 = (\frac{1}{2} + \frac{l}{n-1}, \frac{1}{2} + \frac{l}{n-1})$. *При этом норма оператора как оператора из* L_p *в* L_q *при* $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) = P_2$ *допускает оценку*

$$||T_m||_{p,q} \leq c t^{-l \frac{n-1}{n+1}}.$$

При $p < q$ лемма доказана в [9]. Отметим, что если $l > \frac{n+1}{2}$, то $m(r) \in M_p^q$ для любых $1 < p \leq q < \infty$. Если коэффициенты $a_j = \mathrm{const}, c = \mathrm{const}$, доказательство теоремы получается из явного представления решения задачи (1),(2) с помощью преобразования Фурье и оценки Фурье-образа решения при малых и больших $r = |\xi|$ с помощью лемм 1,2 см. [9].

Здесь мы наметим доказательство теоремы в случае переменных коэффициентов. Решение задачи (1),(2) ищем в виде

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) + w(t,,x). \tag{4}$$

Чтобы описать эти слагаемые, положим для $\xi \neq 0$ $\omega = \frac{\xi}{|\xi|}$, $|\xi| = r$. Пусть $\alpha(r) \in C^\infty$, $\alpha \equiv 1$ при $0 \leq r \leq 1$ и $\alpha(r) \equiv 0$ при $r \geq 2$, $0 \leq \alpha \leq 1$, и $\beta(r) = 1 - \alpha(r)$. Функция $u_2(t,x)$ представляется в виде

$$u_2(t,x) = \sum_{\pm} \sum_{k=1}^{n+2} \int_{R^n} \beta(r) \frac{e^{\pm itr}}{r^k} b_k^{\pm}(t,x,\omega) e^{i(x,\xi)} \hat{g}(\xi) d\xi, \tag{5}$$

где

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} g(x) e^{-i(x,\xi)} d\xi$$

преобразование Фурье функции $g(x)$, а функции $b_k^{\pm}(t,x,\omega)$ определяются из рекуррентной цепочки уравнений переноса:

$$\pm \frac{\partial b_1{}^{\pm}}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \omega_j \frac{\partial b_1{}^{\pm}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \omega_j a_j(t,x) b_1^{\pm} = 0 \tag{6}$$

$$b_1^{\pm}(0,x,\omega) = \mp \frac{i}{2} \tag{7}$$

$$\pm \frac{\partial b_k{}^{\pm}}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \omega_j \frac{\partial b_k{}^{\pm}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \omega_j a_j(t,x) b_1^{\pm} = \frac{i}{2} \mathcal{L}[b_{k-1}^{\pm}] \tag{8}$$

$$b_k^{\pm}(0,x,\omega) = \pm\left(\frac{\partial b_{k-1}^{+}}{\partial t} + \frac{\partial b_{k-1}^{-}}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}, \quad k = 2, \dots, n+2. \tag{9}$$

Этими уравнениями и начальными условиями функции $b_k^{\pm}(t,x,\omega)$ однозначно определяются, более того, могут быть выражены явно. Например,

$$b_1^{\pm}(t,x,\omega) = \mp\frac{i}{2}\exp[\pm\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{j=1}^n a_j(\tau,x-\omega(t-\tau))\omega_j d\tau]. \qquad (10)$$

Если обозначить

$$g_1^{\pm}(t,x,\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[b_1^{\pm}](t,x,\omega),$$

то

$$b_2^{\pm}(t,x,\omega) = \pm\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n \omega_j a_j(0,x+\omega t)\exp[\int_0^t g_1^{\pm}(\tau,x+\omega(t-\tau),\omega)d\tau]+$$

$$+i\int_0^t g_1^{\pm}(\tau,x+\omega(t-\tau),\omega)\exp[\int_0^{t-\tau} g_1^{\pm}(s+\tau,x+\omega(t-\tau-s),\omega)ds]d\tau \qquad (11)$$

и т.п. Обозначим

$$\Phi(x,\omega) = (\frac{\partial b_{n+2}^{+}}{\partial t}+\frac{\partial b_{n+2}^{-}}{\partial t})|_{t=0}$$

и возьмем слагаемое $u_1(t,x)$ в виде

$$u_1(t,x) = \sin t\int_{R^n}[\alpha(r)-\frac{\beta(r)}{r^{n+2}}\Phi(x,\omega)]e^{i(x,\xi)}g(\xi)d\xi. \qquad (12)$$

Теперь нетрудно проверить, что $u_1(t,x)+u_2(t,x)$ точно удовлетворяет начальным условиям (2). Вместе с тем оказывается, что

$$\mathcal{L}[u_1+u_2] = h(t,x) = \sin t\int_{R^n}\alpha(r)[r^2-i\sum_{j=1}^n a_j(t,x)\xi_j-c(t,x)-1]g(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi+$$

$$\sin t\int_{R^n}\frac{\beta(r)}{r^{n+2}}[\Delta_x\Phi+\sum_{j=1}^n(2i\xi_j+a_j(t,x))\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}+(1-r^2+i\sum_{j=1}^n\xi_j a_j(t,x)+c(t,x))\Phi]g(\xi)\cdot$$

$$\cdot e^{i(x,\xi)}d\xi+\int_{R^n}\frac{\beta(r)}{r^{n+2}}(\Phi^{+}(t,x,\omega)e^{itr}+\Phi^{-}(t,x,\omega)e^{-itr})g(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi. \qquad (13)$$

где $\Phi^{\pm}(t,x,\omega) = \mathcal{L}[b_{n+2}^{\pm}(t,x,\omega)]$.

Функция $w(t,x)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям. Потребуем, чтобы

$$\mathcal{L}[w] = -h(t,x).$$

В соответствии с принципом Дюамеля достаточно построить функцию $\tilde{w}(t,\sigma,x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям

$$\tilde{w}(t,\sigma,x)|_{t=\sigma} = 0, \quad \frac{\partial\tilde{w}(t,\sigma,x)}{\partial t}|_{t=\sigma} = -h(\sigma,x)$$

и тогда

$$w(t,x) = \int_0^t \tilde{w}(t,\sigma,x)d\sigma.$$

Учитывая это и построение суммы u_1+u_2, ищем $w(t,x)$ в виде

$$w(t,x) = \int_0^t\sin(t-\sigma)\int_{R^n}[\alpha(r)-\frac{\beta(r)}{r^2}\tilde{\Phi}(\sigma,x,\omega)]H(\sigma,\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi d\sigma+$$

$$+\sum_{\pm}\sum_{k=1}^{2}\int_0^t d\sigma\int_{R^n}\frac{\beta(r)}{r^k}e^{\pm i(t-\sigma)r}b_k^{\pm}(t,\sigma,x,\omega)\hat{H}(\sigma,\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi. \qquad (14)$$

Здесь α и β -те же функции, что и выше, а функции $b_k^{\pm}$ $(k=1,2)$ определяются из уравнений (6),(8) соответственно с той разницей, что начальные условия (7) и (9) ставятся теперь при $t=\sigma$.

Для $b_k^{\pm}$ можно выписать явные выражения, вполне аналогичные формулам (10) и (11). В формуле (14) функция

$$H(t,x)=\int_{R^n}e^{i(x,\xi)}\hat{H}(t,\xi)d\xi$$

определяется из того условия, чтобы было $\mathcal{L}[w]=-h(t,x)$. Это приводит к следующему уравнению для $H(t,x)$:

$$H(t,x)+\int_0^t\sin(t-\sigma)\int_{R^n}[\alpha(r)G_1(t,x,\xi)+\frac{\beta(r)}{r^2}G_2(t,\sigma,x,\omega,\xi)]\hat{H}(\sigma,\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi d\sigma+$$

$$+\int_0^t d\sigma\int_{R^n}\frac{\beta(r)}{r^2}(\mathcal{L}[b_2^+]e^{i(t-\sigma)r}+\mathcal{L}[b_2^-]e^{-i(t-\sigma)r})\hat{H}(\sigma,\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi d\sigma=-h(t,x). \qquad (15)$$

Здесь

$$G_1(t,x,\xi)=r^2-i\sum_{j=1}^{n}a_j(t,x)\xi_j-c(t,x)$$

$$G_2(t,\sigma,x,\omega,\xi)=\Delta_x\tilde{\Phi}+\sum_{j=1}^{n}(a_j(t,x)+2i\xi_j)\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_j}+$$

$$+[1-r^2+c(t,x)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j a_j(t,x)]\tilde{\Phi}.$$

Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\forall t>0$ $u(t,x)=u_1(t,x)+u_2(t,x)+w(t,\xi)$ как функция от x принадлежит L_p, коль скоро $g(x)\in L_p$ при условии, что $(\frac{1}{p},\frac{1}{q})\in\Gamma_1$ и получить оценку (3). Для этого следует обобщить лемму 1 на тот случай, когда символ m зависит также и от x, так что в этом случае T_m- псевдодифференциальный оператор. Это обобщение возможно,если заметить, что оператор свертки, отвечающий символу $(1+|\xi|^2)^{\frac{-\lambda}{2}}$, $0<\lambda<n$, действует из L_p в L_q, если $\frac{\lambda}{n}>1-\frac{1}{p}$ и $\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{n}+\frac{1}{p}-1$,а также использовать теорему М. Нагасэ ([10],[11] стр.307) об L_p - ограниченности псевдодифференциальных операторов. Отсюда следует, что если $1<p\leq q<\infty$, то по обобщенной лемме 1

$$||u_1(t,\bullet)||_{L_q}\leq c_{1t}||g(\bullet)|_{L_p}.$$

Из (5) видно, что $u_2(t,x)$ представляет собой сумму произведений операторов свертки, Фурье-образы ядер которых равны $\beta^{\frac{1}{2}}(r)r^{-k}e^{\pm itr}$ $(k=1,2,...,n+2)$ и псевдодифференциальных операторов с символами $\beta^{\frac{1}{2}}(r)$ $b_k^{\pm}(t,x,\omega)$. Из леммы 2 и теоремы М.Нагасэ [10] тогда следует оценка

$$||u_2(t,\bullet)||_{L_q}\leq c_{2t}||g(\bullet)|_{L_p}$$

коль скоро $(\frac{1}{p},\frac{1}{q})\in\Gamma_1$.

Эти же соображения показывают, что функция $h(t,x)$, определенная формулой (13), также удовлетворяет оценке

$$||h(t,\bullet)||_{L_q} \le c_{3t}||g(\bullet)|_{L_p}, \quad (\frac{1}{p},\frac{1}{q}) \in \Gamma_1.$$

Применяя теорему М.Нагасэ и лемму 2 к случаю $p = q$, что возможно, ибо $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n-1}$, мы видим, что уравнение (15), определяющее $H(t,x)$ можно представить в виде

$$H(t,x) + \int_0^t A(\sigma)H(\sigma,x)d\sigma = -h(t,x), \tag{16}$$

где $A(\bullet)$ - операторнозначная функция, сопоставляющая каждому $\sigma \in [0,t]$ линейный непрерывной оператор в L_q, так что A непрерывно действует в пространстве $C[[0,T],L_q]$, $q \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}]$. Поскольку $C[[0,T],L_q] \ni h$, уравнение (16) однозначно разрешимо в $C[[0,T],L_q]$ методом итераций, и мы получаем, что $H(t,\bullet) \in L_q$.

Это и предыдущие рассуждения, основанные на обобщенной лемме 1, лемме 2 и теореме М.Нагасэ, показывает, что $w(t,x)$, определенное формулой (14), принадлежит L_q, причем

$$||w(t,\bullet)||_{L_q} \le C_{4t}||g(\bullet)||_{L_p}.$$

1. *Marshall B., Straus W., Wainger S.*, $L_p - L_q$ - estimates for the Klein-Gordon equation // J.Math.pures et appl. – 1980. – **59**, – N 4. – P. 417–440.
2. *Sjostrand S.*, On the Riesz means of the solutions of the Schrodinger-equations // Ann.sci. norm. super. Pisa. – 1970. – **24**, – N 3. – P. 331–348.
3. *Peral J. C.*, L_p-estimates for the wave equation // J.Funct. Anal. – 1980. – **56**, – P. 114–145.
4. *Miyachi A*, On some estimates for wave equation in L_P and H_p // Fac. Sci. Univ Tokyo Sec 1A. – 1980. – **27**, – N 2. – P. 331–354.
5. *Марковский А.И.* , Замечания об $L_p - L_q$ - оценках решений уравнения Клейна-Гордона // Укр. матем. журнал. – 1992. – **44**, – N *2*. – С. 233–245.
6. *Марковский А.И.* , Об L_p - оценках решений некоторых гиперболических уравнений // Укр. матем. журнал. – 1987. – **39**, – N *4*. – С. 457–463.
7. *Марковский А.И.* , Об L_p - оценках для уравнения Клейна-Гордона // Диф. уравнения. – 1987. – **23**, – N *11*. – С. 1956–1963.
8. *Марковский А.И.* , Об L_p -оценках решений уравнения, близкого к волновому // Изв.вузов «Математика». – 1987. – N *9*. – С. 67–71.
9. *Марковский А.И.* , Об $L_p - L_Q$ -оценках решений некоторых гиперболических уравнений // Укр. матем. журнал. – 1993. – **45**, – N *7*. С. 992–1008.
10. *Nagase M.*, The L_p boundedness of pseudo - differential operators with nonregular symbols // Comm PDE. – 1977. – N 2. – P. 1045–1061.
11. *Тейлор* М. , Псевдодифференциальные операторы // – М. : Мир. – 1985. – 470 с.